

**De Fractales y Otros Bichos:**  
La Matemática de la Naturaleza  
(Rumbo a la Matemática Informática).

Fernando Galindo Soria.  
Instituto Politecnico Nacional  
Cd. de México, México

Septiembre de 1989

**RESUMEN**

En este trabajo se presenta una introducción a la Matemática de la Naturaleza, incluyendo los fractales, la Teoría de Caos y otras áreas relacionadas.

Como primer punto se introduce el concepto de Fractal y se describen sus propiedades de autosimilaridad y de dimensión fraccionaria, a continuación se da una introducción a la Teoría del Caos y se observa que **el comportamiento de un sistema caótico tiene una estructura fractal**. Como siguiente punto se introduce el concepto de Agregación, que es uno de los mecanismos fundamentales para construir estructuras fractales y se observa que si un fenómeno de agregación se lleva al límite se termina con un cristal, de donde se postula que un fractal y un cristal son casos particulares de un fenómeno general.

A partir de los cristales se introducen los pseudocristales como estructuras que "se ven" ordenadas como un cristal pero que, sin embargo, no conservan las propiedades geométricas de los cristales, lo que nos lleva a plantear que en un sistema se presenta un **orden a corto plazo o cristalino y un orden a largo plazo o pseudocristalino**.

Finalmente, se observa que ciertos fenómenos en los que interactúan 2, 'sustancias' diferentes en las cuales una se quiere infiltrar en la otra para pasar de un lado al otro (como una corriente eléctrica en un material X, un gas en un filtro, etc.), presentar un comportamiento conocido como percolación que es un caso particular del crecimiento fractal (también se le llama fractal lento).

**De Fractales y Otros Bichos:**  
La Matemática de la Naturaleza  
(Rumbo a la Matemática Informática).

Fernando Galindo Soria.  
Instituto Politecnico Nacional  
Cd. de México, México

Septiembre de 1989

**FRACTALES.**

A mediados de los 70's un científico de la IBM, Manderbrot propuso una nueva herramienta para modelar fenómenos de la naturaleza, esta herramienta conocida como Fractal se introdujo rápidamente en la informática, principalmente en la graficación y conforme ha pasado el tiempo se le ha encontrado aplicaciones en muchas otras áreas incluyendo el reconocimiento de formas y la modelación.

En general se puede considerar que un fractal es un objeto que tiene la propiedad de autosimilaridad , o sea que si tomamos el fractal y lo dividimos en sus componentes cada parte tiene las características del todo, por ejemplo, si tomamos una piedra y la estrellamos contra el suelo cada uno de los fragmentos resultantes se puede ver como una piedrita, si a un árbol le quitamos una rama y la sembramos veremos que la forma del árbol y de la rama es la misma, de donde se observa que tanto la piedra como el árbol son autosimilares ya que sus partes son del mismo tipo que el todo.

Cuando se planteo la existencia de los objetos fractales se consideraba que eran objetos curiosos o raros, sin embargo en la actualidad se plantea que prácticamente todos los objetos que existen en la naturaleza tienen algún tipo de comportamiento fractal, de donde esta área a surgido como una de las mas importantes de la Matemática actual.

Una de las cosas que mas sorprende a la gente cuando se introduce en el área de los fractales se encuentra cuando se calcula la dimensión de un objeto fractal y se encuentra que ésta normalmente no es un número entero, con lo cual y de un golpe se cambia radicalmente nuestra concepción de la realidad, ya que, estamos acostumbrados a pensar en objetos de 1, 2, 3, ó más dimensiones pero siempre dimensiones enteras, por lo que, es difícil conceptualizar objetos con dimensiones fraccionarias de 1.66 ó 2.87.

Sin embargo, y conforme pasa el tiempo el concepto de Fractal ha sido cada vez más aceptado por la comunidad científica, tal vez gracias a sus espectaculares resultados en la graficación y cada vez se han encontrado mas fenómenos en los cuales las ecuaciones o modelos toman en cuenta la dimensión fractal del problema, por ejemplo en Física se encontró que las **ecuaciones que describen la relación entre la forma de un objeto y el sonido que emite al ser tocado** dependen de la dimensión fractal del objeto, ya que cuando se utilizaban las dimensiones enteras aproximadas los resultados no eran aceptables. Otra área donde el resultado ha sido espectacular es la de crecimiento poblacional (celular, urbano, químico) donde se ha podido modelar en forma relativamente sencilla (mediante algoritmos recursivos) fenómenos que normalmente requerían del manejo de sistemas de Ecuaciones no Lineales y un soporte computacional muy sofisticado.

Estos resultados y otros más que se están dando prácticamente en todo el mundo nos ha llevado a postular que el Universo está regido por **UN CONTINUO DIMENSIONAL** donde el número de dimensiones no es de tres, cuatro ó cualesquier otro número entero, sino que **EL ESPACIO tiene un NUMERO CONTINUO DE DIMENSIONES** y en su momento las ecuaciones o modelos que describen algún fenómeno tienen que tomar en cuenta este hecho.

A pesar de que hace tiempo que surgieron los fractales como una de las primeras áreas de la matemática que emerge del interior de la Informática y en la actualidad su impacto es de tal magnitud que, tal vez, transforme completamente nuestra concepción de la realidad, en el campo de la enseñanza de la informática en México está ocurriendo una paradoja, ya que seguimos cuestionando si se da o no cierto tema de matemáticas para la física de hace 100 años y ni siquiera hemos oído hablar de esta herramienta actual.

Si los fractales fueran el único caso de Matemáticas de la Informática poco conocido o desconocido en general en México, se podría paliar de alguna forma pero como se explicó anteriormente está ocurriendo una Explosión de Nuevas Áreas y todas con un impacto más o menos radical y realmente si no tomamos acciones curriculares a corto plazo tal vez no perdamos la guerra informática en la trinchera computacional sino en la de las Matemáticas y no porque no se les den Matemáticas a los informáticos sino porque no se les dan

las matemáticas de la Informática que son las que están cambiando el concepto del mundo.

## TEORÍA DE CAOS

Por ejemplo, la Teoría del Caos es una de las áreas de la matemática informática mas importantes y desconocidas que existen actualmente, confundiendo por ejemplo con el desorden, siendo que los sistemas caóticos son sistemas de orden superior.

Se considera que un fenómeno tiene un comportamiento caótico cuando se puede explicar o modelar con un número pequeño de variables aleatorias, **con la característica de que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales propician grandes variantes en el comportamiento final del fenómeno**, tal es el caso de los fenómenos meteorológicos, la Bolsa de Valores, la mezcla de fluidos y de muchos otros procesos 'no controlables'.

Los sistemas caóticos requieren pocas variables para modelar su comportamiento, por lo que son candidatos ideales para tratarse mediante computadoras, utilizando principalmente números pseudoaleatorios, sin embargo, al depender fuertemente de variaciones extremadamente pequeñas en sus condiciones iniciales es necesario investigar sobre su comportamiento para buscar sus propiedades generales y tratar de entenderlos mejor.

En particular se ha encontrado que este tipo de sistemas son un caso particular de los Sistemas Dinámicos (un área 'olvidada' de la Matemática Informática) y como tales se les pueden aplicar algunos de sus conceptos, como el concepto de Atractor, o sea un punto de convergencia de un fenómeno, bajo esta idea se ha detectado que el comportamiento de un fenómeno caótico está restringido dentro de ciertos marcos, ya que, por mucho que cambien de un problema a otro las trayectorias de comportamiento, en todos los casos no estarán separadas entre sí más de lo que permiten las características geométricas del espacio donde se desarrolla este fenómeno (los vientos dependen de las propiedades físicas y la bolsa de las económicas).

Desde el punto de vista informático uno de los resultados más espectaculares de este tipo de fenómenos, es que, cuando se 'gráficán' las diferentes trayectorias de un fenómeno caótico y se obtienen planos transversales que corten todas las trayectorias, el conjunto de puntos obtenidos tienen una

estructura fractal, o sea que el comportamiento de todo el racimo de posibles trayectorias de un fenómeno caótico es un Fractal.

Algunas de las aplicaciones de la Teoría del Caos se han dado en el estudio de los fluidos y principalmente en la construcción de robots o mecanismos que siguiendo siempre una misma secuencia preestablecida (números pseudoaleatorios) de acciones caóticas permiten repetir un mismo proceso tantas veces como se desee, como es el caso de la mezcla de pinturas, donde el color obtenido no sólo depende de la cantidad de colorantes sino también del orden en que se combinan.

## AGREGACIÓN

La relación entre fractales y sistemas dinámicos (en particular atractores) no termina en la Teoría del Caos, sino que vuelve a presentarse en otra de las grandes olvidadas: La Teoría de Cristales.

Dentro de los experimentos realizados sobre agregación (de partículas, personas, células, etc.) en los laboratorios y mediante computadora se ha detectado que dependiendo del 'grado de atracción' de los entes que se están agregando entre sí se puede obtener desde un fractal en forma de estrella filamentosa hasta un cristal, ya que conforme la atracción hacia el centro es mayor, es menos probable que las partículas se queden en la periferia, por lo que, tienden a cristalizarse, de donde podemos postular que **tanto los cristales como los fractales son casos particulares de un mismo fenómeno** controlado por sus propiedades dinámicas.

## PSEUDOCRISTALES.

En el caso particular de los cristales una de sus características se centra en el mantenimiento de un cierto orden y simetría entre sus componentes, sin embargo, desde hace varios años se han encontrado ejemplos de 'cristales' que no son cristales, ya que, 'cuando se observan con lupa' no tienen las características simétricas de un cristal, sin embargo, al mirarlos a nivel macro su comportamiento es cristalino, estos Pseudocristales han causado una gran conmoción porque aparentemente tiraban los fundamentos de la cristalografía, sin embargo, la explicación de su comportamiento fue completamente inocua

y abrió toda una área de investigación sobre el concepto de orden ya de por sí cuestionado por la Teoría de Caos y su 'Orden Caótico'.

Dentro de este nuevo enfoque se observa que las estructuras pueden presentar dos tipos de orden: un microorden, o sea que cada elemento del sistema está ordenado y mantiene relaciones ordenadas con su entorno y un macroorden en el cual, a pesar de que los elementos no mantengan un orden cerrado entre ellos si pueden presentar un comportamiento ordenado como un todo

## **AUTÓMATAS CELULARES.**

El estudio de este tipo de comportamiento se puede complicar en grado sumo si no es un sólo tipo de elemento el que se encuentra involucrado sino varios, ya que en ese caso los modelos informáticos tienen que tomar en cuenta el comportamiento de cada uno de los elementos involucrados y las interacciones entre ellos, llegando a los fenómenos de Coevolución y en particular a los Autómatas Celulares.

Cuando uno observa el desarrollo de la investigación en Informática en México se siente que los criterios para decidir si se estudia o no un área se basan muchas veces en el rumor, la propaganda y principalmente en la moda. Este es tal vez el motivo de que algunas de las áreas mencionadas anteriormente no sean siquiera conocidas en México, ya que no nos han dicho en forma masiva que están de moda, mientras no cambiemos esa actitud y desarrollemos nuestras propias investigaciones sin esperar a hacerlo cuando ya todo mundo lo está haciendo va a ser difícil que podamos competir en el ambiente informático.

El caso de los autómatas celulares es un claro ejemplo de la investigación porque todo mundo lo hace, a pesar de que ya tienen antecedentes de medio siglo o antes, nadie los estudiaba en México a pesar de todas sus aplicaciones.

A mediados de los 40's el matemático húngaro John Von Neumann (tal vez el mayor matemático de este siglo) comienza a investigar sobre la idea de maquinas que se autorreproducen, a partir de esta investigación el mismo Von Neumann en los 50's propone los autómatas celulares como un gran conjunto de autómatas capaces de interactuar entre ellos y con la característica de que se puede autorreproducir, sin embargo, esta área se quedó en el limbo

(aparentemente por razones tecnológicas primero y económicas después) y sólo se desarrolló el área lateral (y mucho menos conocida) de los Sistemas de Automatas.

Es en estos casos donde se ve el gran poder del rumor, ya que, como Von Neumann fue el causante teórico del desarrollo de las máquinas secuenciales, es común que se le "eche la culpa" de que las computadoras actuales sean secuenciales y existan pocas maquinas en paralelo, pero prácticamente nunca se menciona que él estableció también el modelo de las máquinas en paralelo, proceso distribuido y máquinas que se autorreproducen, con lo cual se le hecha la culpa de un desarrollo lineal cuyas bases se encontraban en los problemas técnicos de su época y no en los fundamentos matemáticos como nos hace creer este rumor, en fin, es uno más.

Es a principios de los 80's con el proyecto japonés de la 5.- Generación que se rompe el bloqueo económico (ya para esas fechas no era técnico) que impedía el desarrollo masivo de la programación en paralelo y distribuida, cuando se empiezan a recuperar las herramientas matemáticas de Von Neumann (que nuevamente surgieron dentro de lo que es actualmente la Informática) y es hasta finales de 1988 donde 'se descubre' los autómatas celulares en México, a pesar de múltiples intentos aislados previos para que se investigara esta área (pero no estaba de moda), bienvenidos los Automatas Celulares y tal vez ya vamos lentos en su inclusión dentro de los programas de estudio, ya que están en la base del Proceso Distribuido y de la Inteligencia Artificial.

## **LINGÜÍSTICA MATEMÁTICA.**

Regresando al área de los fractales, una gran cantidad de objetos de la naturaleza como: arboles, nubes, estrellas y montañas que tienen estructura fractal son relativamente fáciles de representar utilizando la Lingüística Matemática.

Esta área surge en 1957 con los trabajos de Noam Chomsky sobre Gramáticas Generativo-Transformacionales, en los cuales se modelan los fenómenos lingüísticos mediante una gramática compuesta por un conjunto de reglas en las cuales se indica la estructura de las oraciones de un lenguaje.

Prácticamente, desde su surgimiento la lingüística matemática fue estudiada por lingüistas y por matemáticos, pero en forma independiente y es alrededor

de 1969 cuando surge el primer libro 'Construcción de Compiladores' de Gries donde se presenta su uso precisamente para la construcción de compiladores con lo que comienza a utilizarse en la informática.

Cuando uno revisa la literatura sobre Lingüística Matemática (Lenguajes Formales, Teoría de Autómatas) se observa un ciclo repetitivo desde principios de los 60's en el cual se enfatiza únicamente la fundamentación matemática con un cúmulo muy grande de teoremas, demostraciones y postulados (libros clásicos de matemáticas pero escritos por informáticos) y cuando uno analiza los temarios encuentra una copia de esos libros, con lo cual muchos cursos de Lingüística Matemática son cursos de matemáticas teóricas sin ninguna vinculación real con la informática, ya que, el participante en éstos nunca sabe para qué sirve, llegando a oírse la opinión de algunos profesores que dicen que estos son únicamente 'cursos formativos'.

Lo anterior es a pesar del sinnúmero de aplicaciones de los lenguajes y autómatas: en compiladores, editores, sistemas operativos, nóminas, gráficas, reconocimiento de patrones y en prácticamente todas las áreas de la Informática.

Es aquí donde se ve el efecto negativo de la moda, ya que en México prácticamente desde sus inicios se manejó la Lingüística Matemática y ya para 1979 se tenían programas de estudio donde se integraba la herramienta matemática a la solución de los problemas de la informática y en la actualidad ya se cuenta con herramientas, teorías y métodos propios, los cuales se han difundido principalmente en los congresos de Inteligencia Artificial y de Matemáticas.

Pero no se cuenta con los recursos masivos de difusión, por lo que, aún ahora, a pesar de que ésta es un área en la que somos líderes mundiales seguimos dando el curso según algún libro extranjero atrasado con respecto a nosotros en varios años y por tal motivo perdemos esos años (hasta que los métodos mexicanos aparezcan en el libro extranjero) y en ese momento todo el desarrollo mexicano sobre Programación Dirigida por sintaxis, generadores de sistemas y sistemas evolutivos se podrá perder de un día para otro.

En particular muchos fractales pueden ser representados mediante una gramática, con lo que se cierra un círculo. Por ejemplo, la Lingüística Matemática y los Fractales se aplican a la generación de paisajes y en particular con la ecuación lingüística  $S \rightarrow a^*S^*$  se puede representar la



estructura de múltiples elementos de la naturaleza al extremo que la proponemos como **una de las ecuaciones fundamentales de la naturaleza.**

## **MATEMÁTICAS ORGÁNICAS.**

El Código Genético o Doble Hélice es otro tipo de estructura lingüística, la doble hélice fue descubierta a mediados de los 50's y le valió el premio Nobel a sus descubridores y es el mecanismo con el cual se transmite la información genética en los seres vivos. Una doble hélice está formada por dos cadenas de aminoácidos entrelazadas de tal manera que a cada aminoácido de cierto tipo A en una cadena le corresponde siempre un aminoácido del Tipo B en la otra cadena, con lo cual si se tiene A en la primera podremos asegurar que se tendrá B en la segunda.

Este mecanismo de transmisión de información ha sido poco estudiado por los informáticos a pesar de estar en la base de la Biotecnología y hace poco tiempo que se comenzó a trabajar en un área conocida como Algoritmos Genéticos, en la cual a partir del modelo de comportamiento de la doble hélice se han desarrollado métodos para hacer programas, basados en que un algoritmo genético realiza varios tipos de actividades.

- a) Duplica un código dado (por ejemplo un programa).
- b) Duplica un código transponiendo algunas partes del código.
- c) Introduce 'errores' aleatorios en el código.
- d) Construye un nuevo código a partir de dos códigos viejos.

De tal manera que si, por ejemplo, se quiere mejorar genéticamente un programa que ordene números, el proceso sería:

- i) Se da un programa inicial.
- ii) Se construyen genéticamente una gran cantidad de programas a partir del inicial.
- iii) Se eligen los 'mejores programas' y se dan como entrada nuevamente al sistema repitiéndose el ciclo.

Se espera que después de un buen número de generaciones se obtengan códigos mejorados.

Este tipo de métodos se han aplicado principalmente para generar programas orientados a resolver problemas de complejidad NP (problemas que conforme aumenta la cantidad de datos que manejan aumenta enormemente los recursos que necesitan para resolverse y en los cuales los algoritmos tradicionales son muy ineficientes) y los resultados han sido espectaculares.

## **MÉTODOS HEURÍSTICOS.**

El problema 'clásico' de tipo NP es el problema del agente viajero y consiste en encontrar la ruta mínima que une a todas las ciudades que tiene que recorrer un vendedor. Se demuestra matemáticamente que si se encuentra una solución a este problema, esta solución se puede aplicar para una gran cantidad de problemas.

Dentro de las Matemáticas de la Naturaleza se han desarrollado otros métodos aparte de los genéticos para atacar los problemas NP, en particular se tienen:

- a) Los métodos de enfriamiento en los cuales se simula el comportamiento de un material que se está enfriando.
- b) Los métodos de pompas de jabón en el cual se 'sumerge' en una tina con jabón el mapa de ciudades a visitar y las pompas por tensión superficial tienden a encontrar la estructura mínima.
- c) Los métodos de liga en los cuales se hace pasar una liga de tal forma que vaya uniendo las ciudades de tal forma que la distancia sea mínima.

En estos métodos nuevamente se vuelven a encontrar las características de un sistema dinámico y en particular el concepto de atractor.

## **TEORÍA DE LA PERCOLACIÓN.**

Otro tipo de problemas se presenta cuando el recorrido se tiene que realizar en un ambiente hostil o al menos no amigable, como es el caso de una sustancia que necesita cruzar una capa porosa. Este tipo de problemas lo estudia otra de las áreas de la matemática de la naturaleza conocida como Teoría de la Percolación (también llamada Fractal Lento).

La teoría de la percolación estudia los fenómenos que se presentan cuando una sustancia quiere cruzar de un lado a otro de un espacio cubierto por otra sustancia (como por ejemplo, el movimiento de los electrones en algún material) e investiga en qué condiciones se puede dar y en cuáles no la percolación (Percolación significa Infiltración).

Los métodos para resolver problemas de percolación son 'relativamente' sencillos, pero también son extremadamente tardados y han orillado al desarrollo de máquinas computadoras de propósito específico sumamente poderosas como es el caso del computador europeo Percola.

## **REDES NEURONALES.**

Uno de los problemas de investigar por modas es el hecho de que cuando algo ya está de moda es porque el 'estado del arte' ya está muy avanzado y muy difundido, por lo que, es difícil competir en la investigación y/o crear nichos tecnológicos. Este es el caso de otro de los Grandes Olvidados: las Redes Neuronales.

Las Redes Neuronales fueron propuestas en 1943 por dos neurofisiólogos McCulloch y Pitts como un mecanismo para modelar el funcionamiento del cerebro y hasta principios de los 70's se tiene una gran cantidad de investigación sobre este tema, los problemas técnicos para construir una 'neurona' física y algunos problemas sobre como 'aprendían' las redes hicieron que esta área fuera quedando relegada, sin embargo, en México durante toda la década de los 70's se siguieron realizando investigaciones sobre el área, las cuales fueron muriendo por falta de apoyo o por problemas de los investigadores.

Nuevamente es a principios de los 80's con el surgimiento del proyecto japonés, donde tecnológicamente se hace factible el desarrollo de las redes neurales y es a finales de los 80's donde en México de repente mucha gente descubre las redes neuronales y se ponen a estudiarlas, pero ya el golpe de 10 años de atraso se hace sentir y es necesario enfatizar que ya vamos muy atrasados.

## **CONCLUSIÓN.**

Como se puede observar de este vistazo a vuelo de pájaro, el área de la Matemática de la Naturaleza es sumamente amplio, mucha de ella ha surgido dentro de la Informática y está en sus fundamentos, prácticamente no la conocemos, está revolucionando el estudio de la realidad y es imprescindible su inclusión en las curricula de Informática si es que no nos queremos ver desplazados definitivamente.