

# REPRESENTACIÓN DE LA ESTRUCTURA PROFUNDA DEL RUIDO 1/f MEDIANTE LA ECUACIÓN DE LA NATURALEZA

Fernando Galindo Soria

Cd. de México a 9 de Junio del 2004  
Ultima actualización 19 de Agosto del 2004

*Escuela Superior de Cómputo (ESCOM) del Instituto Politécnico Nacional (IPN)*  
Av. Miguel Othón de Mendizábal y Av. Juan de Dios Bátiz s/n  
Zacatenco, Cd. de México 07738 MÉXICO  
www.fgalindosoria.com fgalindo@ipn.mx www.laredi.com

## Resumen

Los ruidos de colores representan patrones característicos de muchos fenómenos naturales y en particular el ruido 1/f o rosa se presenta en gran cantidad de fenómenos, como los terremotos, el comportamiento de la bolsa, distribución de montañas y muchos más[1][2][7], reflejando la estructura de los fenómenos donde aparece. Por lo que, en este trabajo analizaremos esa estructura y la representaremos gramaticalmente, para lo cual, se analiza el algoritmo de Richard F. Voss para generar ruido 1/f[1], tanto en su estructura superficial (lanzamiento de dados) como en su estructura profunda (generación de la secuencia en la que se lanzan los dados), mostrándose que su estructura profunda se puede representar mediante reglas de producción que son casos particulares de la ecuación de la naturaleza  $S \rightarrow e^*S^*$ [10]

Palabras Claves: Ruido de Colores, Blanco, Browniano, 1/f, Ecuación de la Naturaleza, Lingüística Matemática, Reglas de producción.

## 1. CONCEPTOS GENERALES

### 1.1 Ondas y Espectro de Frecuencias

Los ruidos de colores abarcan desde lo que se conoce como ruido blanco o  $1/f^0$  hasta el ruido browniano o  $1/f^2$  y el ruido negro o  $1/f^3$ [8], pasando por los flicker noises (o ruidos de centelleo) o  $1/f^a$  donde  $0 < a < 2$ , y en particular el ruido 1/f que se obtiene cuando  $a = 1$  y que es uno de los ruidos mas importantes en la naturaleza.

Para entender la diferencia entre todos estos tipos de ruidos es necesario tener una idea de lo que se conoce como análisis espectral[3][4], para lo cual partiremos del análisis de las ondas sinusoidales puras, como las que se generan mediante la función  $f(\theta) = \text{sen}(\theta)$  que tiene la forma mostrada en la figura 1.1.

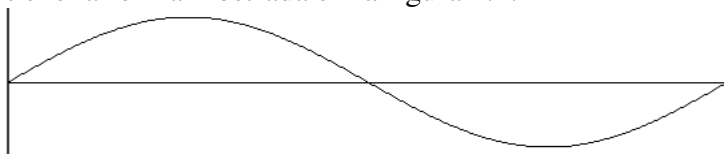


Fig. 1.1 Grafica de la función  $\text{seno}(\theta)$  con amplitud 1 y frecuencia 1

Algunas de las características que se toman en cuenta para el análisis de las ondas puras son la *Amplitud*, la *frecuencia*, y el *desplazamiento de fase*.

La *frecuencia* nos indica el numero de ciclos o repeticiones de la onda en un intervalo dado, por ejemplo en las Fig. 1.2 a, b, c se muestran ondas con frecuencia 1, 2 y 3.

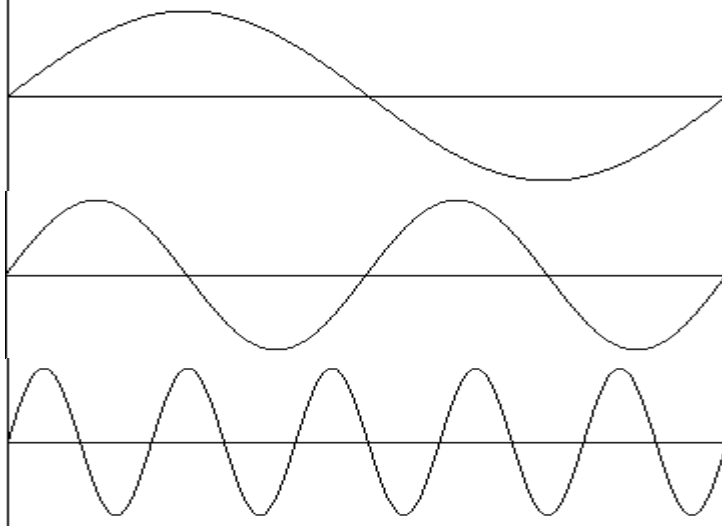


Fig. 1.2a Grafica de la función  $\text{seno}(\theta)$  que nos muestra una onda con amplitud 1 y frecuencia 1

Fig. 1.2b Grafica de la función  $\text{seno}(2\theta)$  que nos muestra una onda con amplitud 1 y frecuencia 2

Fig. 1.2c Grafica de la función  $\text{seno}(5\theta)$  que nos muestra una onda con amplitud 1 y frecuencia 5

La *amplitud* es la altura de la onda, por ejemplo en la figura 1.3 se muestran tres ondas con la misma frecuencia y diferente amplitud.

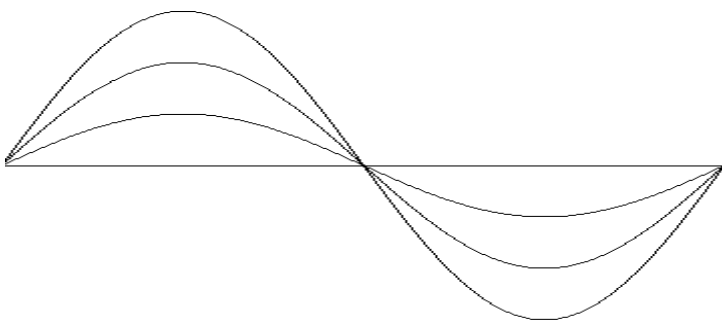


Fig. 1.3 Grafica de las funciones  $\text{seno}(\theta)$ ,  $2\text{seno}(\theta)$  y  $3\text{seno}(\theta)$  que nos muestra tres ondas con amplitud 1, amplitud 2 y amplitud 3 y frecuencia 1

Otras características de las ondas senosoidales puras son su *comportamiento periódico o cíclico* y el *desplazamiento de fase*.

El *desplazamiento de fase* ocurre cuando la onda no empieza en la coordenada cero, por ejemplo en las figuras 1.4 se ve una onda senosoidal desplazadas  $45^\circ$ .

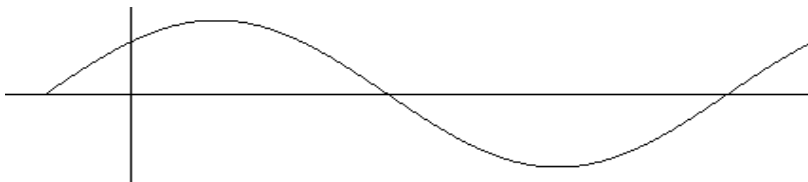


Fig. 1.4 Onda senosoidal con amplitud 1, frecuencia 1 y desplazamiento de fase de  $45^\circ$

En general una onda senosoidal se escribe como  $f(\theta)=A*\text{seno}(f*\theta+\omega)$  donde A nos indica la amplitud, f es la frecuencia,  $\omega$  es el desplazamiento de fase y  $\theta$  es el valor de la función en un punto.

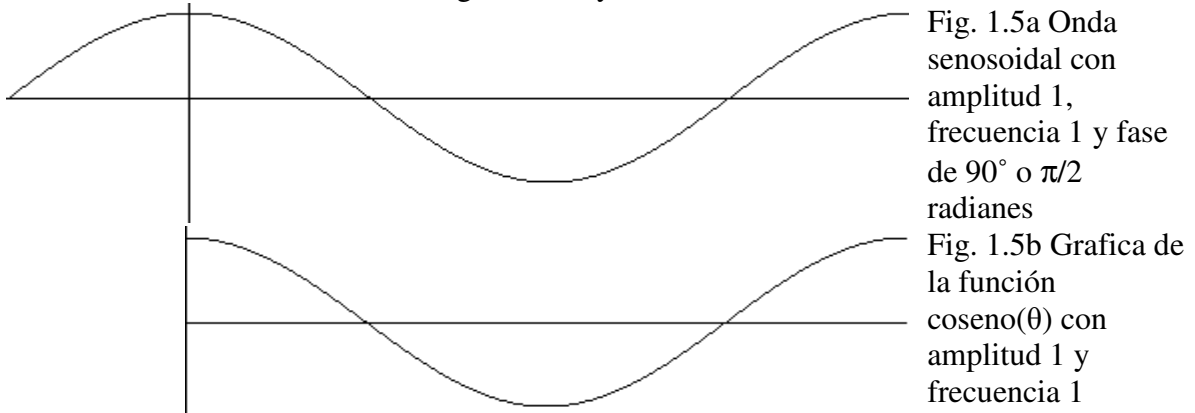
$\theta$  y  $\omega$  pueden estar dados en grados o en radianes, pero dentro del análisis de señales se manejan en general radianes, por lo que en la Tabla 1.1 se muestra la equivalencia entre algunos grados y radianes.

grados	radianes
0	0
45	$\pi/4$
90	$\pi/2$
180	$\pi$
360	$2\pi$

Tabla 1.1 Equivalencia entre grados y radianes

Por ejemplo la función  $3\text{seno}(5\theta+\pi/4)$  corresponde a una onda senosoidal con amplitud 3, frecuencia 5 y desplazamiento de fase de  $\pi/4$  radianes o  $45^\circ$ .

Ahora bien si se grafica la función  $f(\theta)=\text{coseno}(\theta)$  se observa que la onda generada es idéntica a la que se obtiene al graficar la función seno con un desplazamiento de fase de  $90^\circ$  o  $\pi/2$  radianes, como se ve en las figuras 1.5a y 1.5b.



Por lo que es equivalente usar la función seno o la función coseno con un desplazamiento de fase de  $\pi/2$  radianes.

Las ondas que tienen *comportamiento periódico o cíclico* se caracterizan porque se repiten periódicamente, o sea que, cada  $360^\circ$  o  $2\pi$  radianes la onda se vuelve a repetir, este comportamiento se refleja matemáticamente en que una función periódica  $f(\theta)$  es idéntica a la función  $f(2\pi+\theta)$ , y en general para cualquier valor entero  $t$  se tiene que  $f(\theta)=f(2\pi t+\theta)$ .

Por ejemplo las funciones seno( $\theta$ ) y coseno( $\theta$ ) generan ondas periódicas, o sea que  $\text{coseno}(\theta)=\text{coseno}(2\pi t+\theta)$  y  $\text{seno}(\theta)=\text{seno}(2\pi t+\theta)$  como se ve en la figura 1.6 donde se muestra la función seno( $\theta$ ) con periodo 1 y 3.

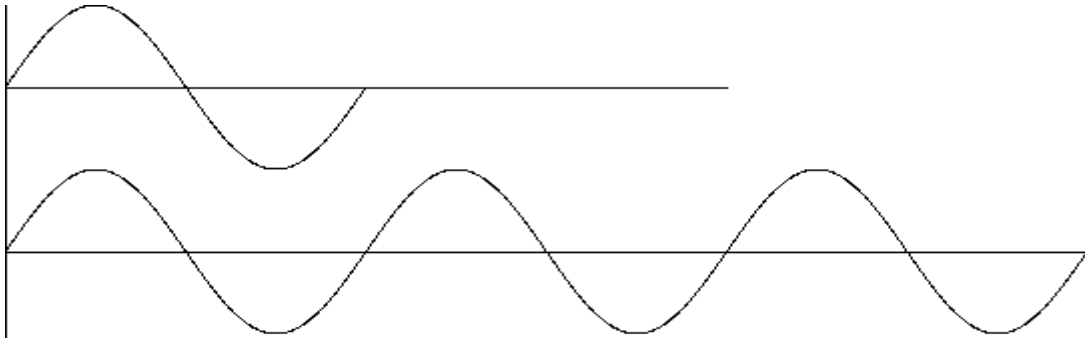
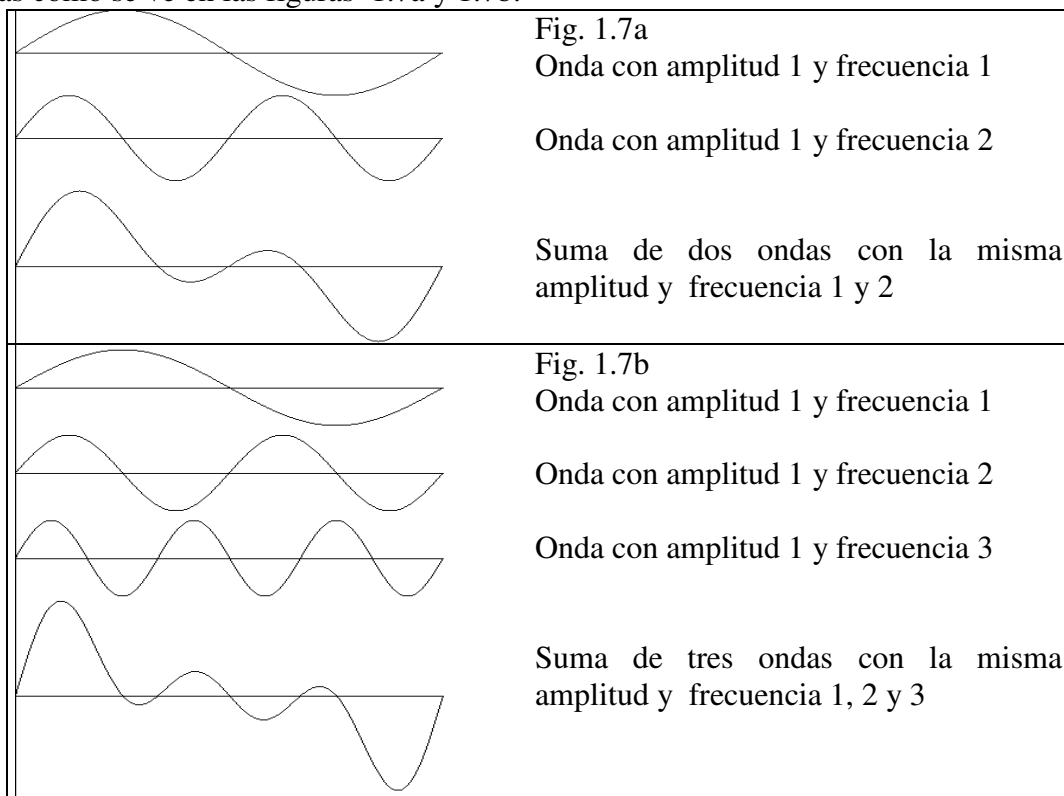


Fig. 1.6 Graficas de la función seno con periodos 1 y 3

Otra propiedad de las ondas es que se pueden sumar entre ellas dando origen a nuevas ondas como se ve en las figuras 1.7a y 1.7b.



Se pueden sumar tantas ondas como se quiera dando lugar a sumas infinitas de senos y cósenos y como el seno es idéntico al coseno desplazado 90 grados o  $\pi/2$  radianes, se tiene que estas ondas se pueden representar como sumas infinitas de cósenos de la forma

$$f(t) = A_0 + A_1 \coseno(f_1 t - \omega_1) + A_2 \coseno(f_2 t - \omega_2) + A_3 \coseno(f_3 t - \omega_3) + \dots$$

o en general

$$f(t) = \sum A_i \coseno(f_i t - \omega_i)$$

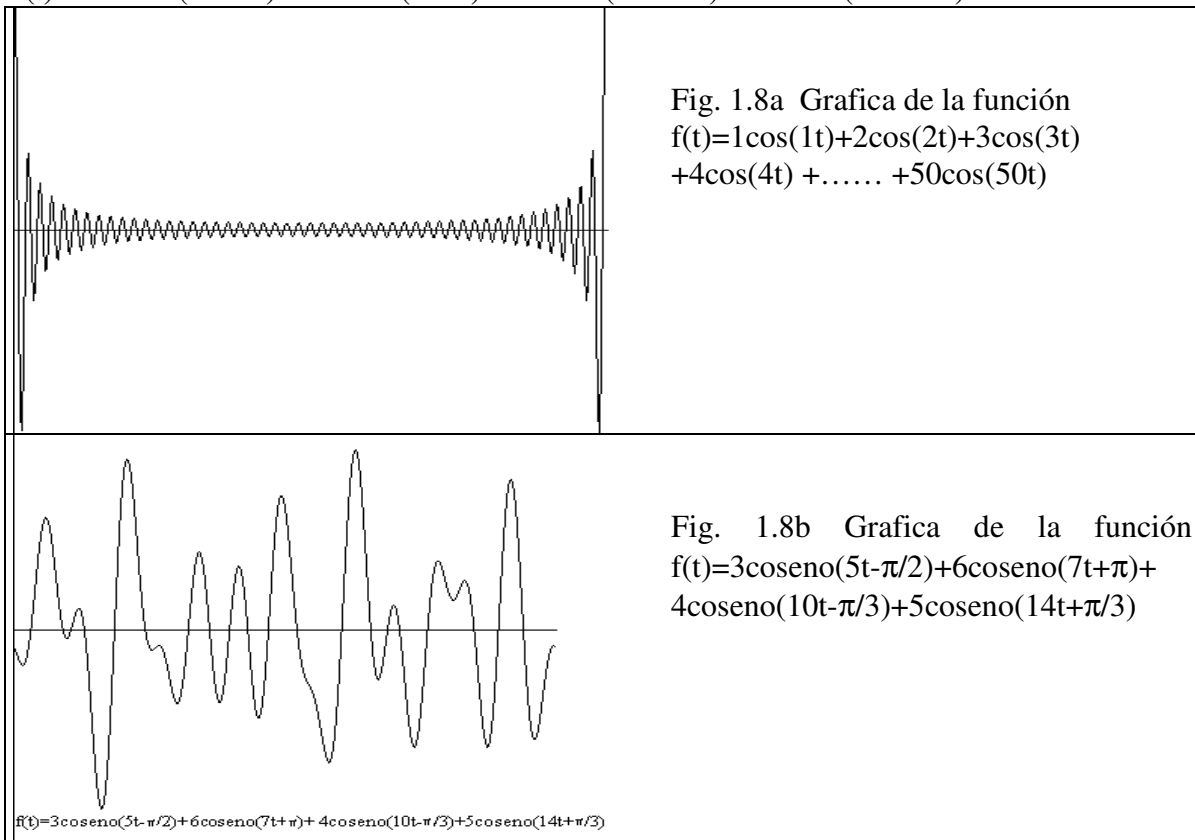
O sea que, la función  $f(t)$  esta formada por una suma infinita de ondas de la forma  $A_i \coseno(f_i t - \omega_i)$ , donde para la onda  $i$ -ésima se tiene que  $A_i$  es la amplitud,  $f_i$  es la frecuencia,  $\omega_i$  es el desplazamiento de fase y en general se considera que  $t$  representa el tiempo transcurrido desde que se comenzó a generar la señal.

Por ejemplo en la figura 1.8a se muestra la grafica de la función

$$f(t)=1\cos(1t)+2\cos(2t) +3\cos(3t) +4\cos(4t) +\dots\dots +50\cos(50t)$$

y en la figura 1.8b se muestra la grafica de

$$f(t)=3\coseno(5t-\pi/2)+6\coseno(7t+\pi)+4\coseno(10t-\pi/3)+5\coseno(14t+\pi/3)$$



Ahora bien, si se tiene una señal representada como una suma de cósenos, se puede encontrar directamente lo que se conoce como *espectro de la señal*, para lo cual se generan dos graficas, una en que se relaciona la amplitud con la frecuencia y la otra que relaciona la fase con la frecuencia

Por ejemplo, en la Tabla 1.2 se muestra la relación que existe entre las frecuencias, amplitudes y fases de la función presentada en la figura 1.8b.

$$f(t)=3\coseno(5t-\pi/2)+6\coseno(7t+\pi)+4\coseno(10t-\pi/3)+5\coseno(14t+\pi/3)$$

y en las figuras 1.9a y 1.9b se presentan sus espectros de señal.

función f(t)	amplitud	frecuencia	fase
3 coseno( 5 t - $\pi/2$ )+	3	5	- $\pi/2$
6 coseno( 7 t + $\pi$ )+	6	7	$\pi$
4 coseno(10 t - $\pi/3$ )+	4	10	- $\pi/3$
5 coseno(14 t + $\pi/3$ )	5	14	$\pi/3$

Tabla 1.2 relación entre las amplitudes, frecuencias y fases de la función f(t)

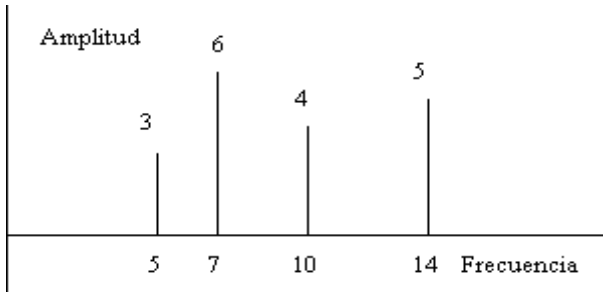


Fig. 1.9a Espectro de señal que relaciona la frecuencia con la amplitud de la función  $f(t)=3\coseno(5t-\pi/2)+6\coseno(7t+\pi)+4\coseno(10t-\pi/3)+5\coseno(14t+\pi/3)$

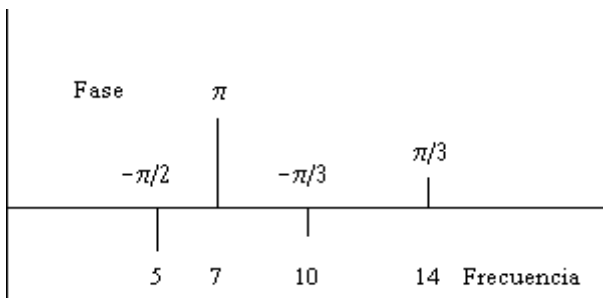


Fig. 1.9b Espectro de señal que relaciona la frecuencia con la fase de la función  $f(t)=3\coseno(5t-\pi/2)+6\coseno(7t+\pi)+4\coseno(10t-\pi/3)+5\coseno(14t+\pi/3)$

A la grafica que relaciona la amplitud con la frecuencia se le conoce como el *espectro de frecuencia* y es una herramienta fundamental para explicar las diferencias entre los diferentes tipos de ruidos que se presentaron al principio.

Cuando se dice que una señal tiene una distribución  $1/f^a$ , lo que se esta indicando es que si graficamos el espectro de frecuencias de la señal, para la frecuencia 1 se tiene que la amplitud vale  $1/1^a$  o sea 1, cuando la frecuencia vale 2 se tiene que la amplitud vale  $1/2^a$  y así sucesivamente para todas las frecuencias que componen la señal, como se ve en la tabla 1.3

Frecuencia	Amplitud
1	$1/1^a$
2	$1/2^a$
3	$1/3^a$
4	$1/4^a$
...	...
...	...
n	$1/n^a$

Tabla 1.3 Relación entre las frecuencias de una señal y la amplitud de cada frecuencia, cuando el espectro de frecuencia tiene una distribución  $1/f^a$

Algunos de los ruidos mas conocidos se presentan cuando en  $1/f^a$ ,  $a$  vale 0, 1, 2 y 3.

## 1.2 Ruido Blanco, Browniano y $1/f$

Cuando en  $1/f^a$ ,  $a$  vale cero se tiene el ruido blanco, con  $a$  igual a 1 se tiene el ruido  $1/f$ , si  $a$  vale 2 se tiene el ruido browniano y con  $a$  igual a 3 se tiene el ruido negro.

El *ruido blanco o aleatorio* se presenta cuando una señal tiene un comportamiento aleatorio, o sea que el valor de la señal en un instante no tiene ninguna relación con el valor de la señal en el siguiente instante, se dice también que no tiene memoria o que no esta autocorrelacionado, en la figura 1.10a se presenta un ejemplo de ruido blanco. Una de las propiedades mas importantes del ruido blanco es que *su espectro de frecuencias tiene una distribución  $1/f^0$* .

Cuando se dice que el ruido blanco es del tipo  $1/f^0$  se esta diciendo que para todas las frecuencias su amplitud vale 1, porque  $1/f^0=1$ , para cualquier valor de  $f$  diferente de cero como se ve en la tabla 1.4a. Por eso se le llama ruido blanco, porque en términos del análisis de la señal indica que todas las frecuencias contribuyen con la misma potencia a la señal, en forma parecida a como el color blanco surge de la combinación de todos los colores.

El *ruido browniano*[9] (en honor a R. Brown quien lo describió en 1827) o café (figura 1.10b), tiene la propiedad de que *su espectro de frecuencia tiene una distribución  $1/f^2$*  o sea que cuando la frecuencia vale 1 la amplitud vale  $1/1^2= 1$ . cuando la frecuencia vale 2 la amplitud vale  $1/2^2$  o sea  $1/4$  y así sucesivamente como se muestra en la tabla 1.4b, por lo que, en el ruido browniano las componentes con frecuencia mas alta prácticamente no son significativas.

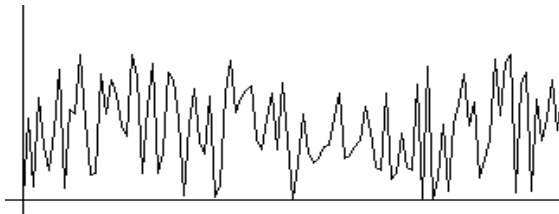


Fig. 1.10a Grafica de Ruido Blanco

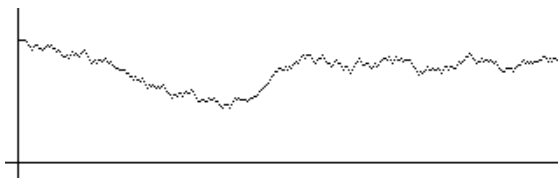


Fig. 1.10b Grafica de Ruido Browniano

Tanto el ruido blanco como el ruido browniano tienen comportamientos muy interesantes y se presentan frecuentemente en fenómenos de la naturaleza, pero marcan los extremos de un espacio enorme, ya que en medio existen una gran cantidad de fenómenos que tienen un espectro de frecuencia que esta entre el  $1/f^0$  del ruido blanco y  $1/f^2$  del browniano, o sea que *tienen un espectro de frecuencia de la forma  $1/f^a$  donde  $0 \leq a \leq 2$* , a estos tipos de ruidos se les llama *ruidos de colores*.

Un caso particular de los ruidos de colores es *el ruido 1/f*, el cual *se presenta cuando  $a=1$* , o sea que el ruido tiene un comportamiento  $1/f$ , cuando la frecuencia vale 1 la amplitud vale 1, cuando la frecuencia vale 2 la amplitud vale  $1/2$ , y así para las demás frecuencias como se muestra en la tabla 1.4c.

El ruido  $1/f$  o rosa se descubrió en 1925 por J.B. Johnson[2] y se ha encontrado que se presenta en gran cantidad de fenómenos, como los terremotos, el comportamiento de la bolsa, distribución de montañas y mucho mas[1][2][7], reflejando la estructura de los fenómenos donde aparece. Por lo que en este trabajo analizaremos esa estructura.

a) Ruido Blanco $a=0$		b) Ruido 1/f $a=1$		c) Ruido Browniano $a=2$	
Frecuencia	Amplitud	Frecuencia	Amplitud	Frecuencia	Amplitud
1	$1/1^0=1$	1	1/1	1	$1/1^2$
2	$1/2^0=1$	2	1/2	2	$1/2^2$
3	$1/3^0=1$	3	1/3	3	$1/3^2$
4	$1/4^0=1$	4	1/4	4	$1/4^2$
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
n	$1/n^0=1$	n	1/n	n	$1/n^2$

Tabla 1.4 a, b, c Relación entre la frecuencia y amplitud de los ruidos blanco,  $1/f$  y browniano

## 2. RUIDO 1/f Y ECUACIÓN DE LA NATURALEZA

### 2.1 Representación gramatical de la estructura profunda del algoritmo de Voss

En 1978 Martin Gardner publico “Música blanca y música parda, curvas fractales y fluctuaciones del tipo  $1/f$ ” (White and brown music, fractal curves, and one-over-f noise, in Scientific American, abril de 1978) [1], un artículo sobre los ruidos de colores, donde describe un algoritmo desarrollado por Richard F. Voss para generar ruido  $1/f$ . En este algoritmo podemos visualizar dos procesos entrelazados, el primero se basa en la generación de números aleatorios (lanzamiento de dados) y el segundo es el proceso que indica en que orden se deben lanzar estos dados, siguiendo la secuencia marcada por los cambios que se presentan en una sucesión de números binarios.

O sea que el algoritmo se caracteriza por una estructura superficial, representada por el lanzamiento de los dados y una estructura profunda, que indica el orden en que se lanzan los dados.

La *estructura superficial* del algoritmo se representa por el lanzamiento de los dados (o sea la generación de un número aleatorio). En este algoritmo se tienen tres dados  $d_1, d_2, d_3$  (pueden ser 4, 5, ..., n dados), cada dado con valores entre 1 y 6 (pueden ser otros rangos de valores).

Al lanzarse los tres dados se obtiene una secuencia de valores, que va desde (1,1,1) hasta (6,6,6), por lo que al sumarse los valores de los dados se obtiene un número entre 3 y 18, lo cual corresponde a 16 valores diferentes de ruido (si cada valor se asocia con una nota musical, se genera música 1/f).

La *estructura profunda* marca la pauta de los cambios generales del sistema y en este caso nos indica el orden en que se lanzan los dados.

El mecanismo desarrollado por Voss para indicar el orden en que se lanzan los dados, consiste básicamente en generar una secuencia de números binarios, donde cada bit representa a un dado, por lo que, como en este caso se tienen tres dados, se generan números binarios de 3 bits, obteniéndose la secuencia 000, 001, ..., 111.

Para obtener el orden en que se deben lanzar los dados primero se lanzan los tres dados y se suma el resultado para tener la primera nota.

A continuación se van generando secuencialmente los números binarios, *si entre un número binario y el que le sigue cambia el valor de algún bit se lanza el dado correspondiente a ese bit, sin tocar los dados que no cambian*, como se ve en la tabla 2.1, y se suma el valor de los tres dados para obtener la siguiente nota.

Valor del bit correspondiente a cada dado			Dado que se lanza		
d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>			
0	0	0	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>
0	0	1			d <sub>3</sub>
0	1	0		d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>
0	1	1			d <sub>3</sub>
1	0	0	d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>
1	0	1			d <sub>3</sub>
1	1	0		d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>
1	1	1			d <sub>3</sub>

Tabla 2.1 Secuencia de lanzamiento de tres dados de acuerdo a los cambios en los números binarios

Como se puede ver en la tabla 2.1, primero se lanzan los 3 dados d<sub>1</sub>, d<sub>2</sub>, d<sub>3</sub>, y se suman sus valores (Obteniendo un número entre 3 y 18, o sea 16 posibles valores), luego como de 000 a 001 cambio el bit correspondiente al dado d<sub>3</sub>, solo se lanza el dado d<sub>3</sub> y no se tocan ni d<sub>1</sub> ni d<sub>2</sub>, y nuevamente se vuelven a sumar los valores de los 3 dados.

De 001 a 010 cambian los valores de los bits correspondientes a los dados d<sub>2</sub> y d<sub>3</sub>, por lo que, se lanzan los dados d<sub>2</sub> y d<sub>3</sub> sin tocar d<sub>1</sub> y se suma el resultado para generar la nueva nota, y así sucesivamente. Generándose la secuencia de lanzamientos d<sub>1</sub>d<sub>2</sub>d<sub>3</sub>, d<sub>3</sub>, d<sub>2</sub>d<sub>3</sub>, d<sub>3</sub>, d<sub>1</sub>d<sub>2</sub>d<sub>3</sub>, d<sub>3</sub>, d<sub>2</sub>d<sub>3</sub>, d<sub>3</sub>, que representa la estructura profunda del algoritmo de Voss

En la tabla 2.1 se muestran los valores entre 000 y 111 por lo que solo se generan 8 notas, pero *el algoritmo se puede volver cíclico*, con lo que, después de 111 se genera nuevamente 000 y se continua la generación de notas indefinidamente.

Si se toma la columna que indica el dado que se lanza y se pone verticalmente, como se muestra en la Fig. 2.1a, se observa que es la misma estructura de un árbol binario como se puede ver en las Figuras. 2.1a, 2.1b y 2.1c donde se introdujo la letra S para indicar la raíz del árbol.

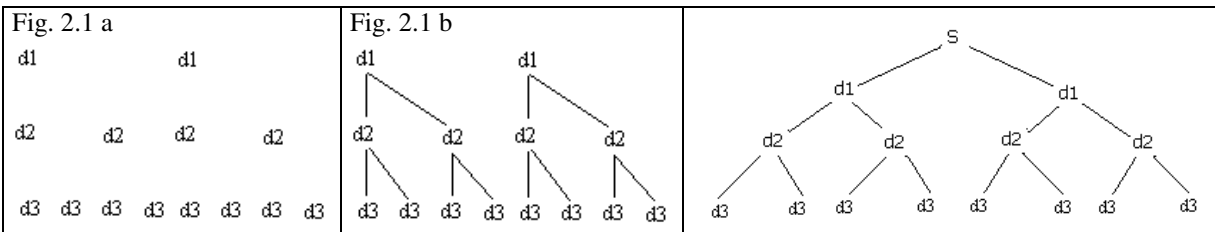


Fig. 2.1 a, b, c La secuencia de lanzamientos de los dados, que aquí aparece en forma vertical, forma la estructura de un árbol binario; se introdujo S para indicar la raíz del árbol

Los *árboles binarios* se utilizan cotidianamente para representar la estructura de muchos sistemas y procesos y *están formados por un tronco y dos ramas, una rama a la izquierda y una rama a la derecha*. Al tronco lo denotamos con la letra *e* para indicar que representa a los elementos del sistema, la rama a la izquierda la representamos como  $S_i$  para resaltar que por si sola es un sistema y la rama a la derecha como  $S_d$ , para indicar que también es otro subsistema, o sea que un sistema que tiene la estructura de un árbol binario esta formado por un elemento *e* y dos subsistemas  $S S$ .

Una forma de representar la relación entre esos componentes es mediante la ecuación lingüística o *regla de reescritura*  $S \rightarrow e S_i S_d$ , donde la flecha  $\rightarrow$  indica que *S* se puede sustituir por  $e S_i S_d$  (En general una regla de reescritura  $\alpha \rightarrow \beta$  se interpreta como que  $\alpha$  se puede sustituir por  $\beta$ ). Y representa el llamado a un proceso *e* que genera el tronco, seguido de 2 llamados recursivos  $S S$  que generan las ramas.

Por lo que una forma simple de representar la estructura del algoritmo de Voss es mediante la ecuación  $S \rightarrow e S_i S_d$  o mas generalmente  $S \rightarrow e S S$  que a su vez se representa directamente como pseudocódigo

Ecuación	Pseudocódigo
S	S()
$\rightarrow$	{
e	e()
S	S()
S	S()
	}

## 2.2 Generalización

Para 4 dados el análisis es similar, como se ve en la tabla 2.2

Valor del bit correspondiente a cada dado				Dado que se lanza
d <sub>1</sub>	d <sub>2</sub>	d <sub>3</sub>	d <sub>4</sub>	
0	0	0	0	d <sub>1</sub> d <sub>2</sub> d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
0	0	0	1	d <sub>4</sub>
0	0	1	0	d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
0	0	1	1	d <sub>4</sub>
0	1	0	0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
0	1	0	1	d <sub>4</sub>
0	1	1	0	d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
0	1	1	1	d <sub>4</sub>
1	0	0	0	d <sub>1</sub> d <sub>2</sub> d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
1	0	0	1	d <sub>4</sub>
1	0	1	0	d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
1	0	1	1	d <sub>4</sub>
1	1	0	0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
1	1	0	1	d <sub>4</sub>
1	1	1	0	d <sub>3</sub> d <sub>4</sub>
1	1	1	1	d <sub>4</sub>

Tabla 2.2 Secuencia de lanzamiento de los dados de acuerdo a los cambios en los números binarios, suponiendo 4 dados

El patrón característico es d<sub>1</sub> d<sub>2</sub> d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>2</sub> d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>1</sub> d<sub>2</sub> d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>2</sub> d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>, d<sub>3</sub> d<sub>4</sub>, d<sub>4</sub>. Si se pone la secuencia en forma vertical se encuentra de nuevo que representa un árbol binario, solo que de cuatro niveles como se ve en la Fig. 2.2.

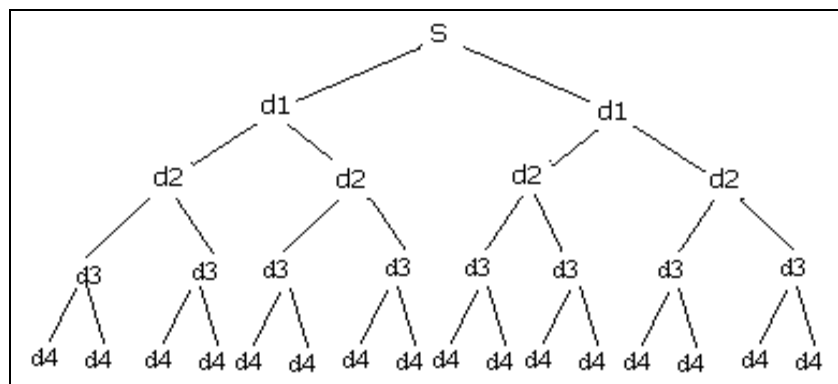


Fig. 2.2 árbol binario que representa la secuencia de lanzamiento de los dados cuando se manejan números de 4 bits, correspondientes a 4 dados

En general si se usan  $n$  dados se tiene árboles binarios con  $n$  niveles que se siguen representando mediante la ecuación  $S \rightarrow e S S$  solo que tomando en cuenta el número de niveles, por lo que el pseudocódigo queda

```

S(num_nivel)
{
  if num_nivel < N
    e(num_nivel) //En cada nivel lanza el dado correspondiente a ese nivel
    S(num_nivel+1) //Llama recursivamente al sistema 2 veces
    S(num_nivel+1)
  else suma valores de dados y genera ruido
}

```

O sea si el número de nivel  $num\_nivel$  es menor que el número de dados  $N$ , se lanza el dado de ese nivel y se llama al árbol recursivamente dos veces, si se llegó al último nivel se suman los valores de los dados y se genera el ruido resultante.

Tampoco es obligatorio usar solo números binarios, por ejemplo en la tabla 2.3 se puede ver el resultado si en lugar de usar números binarios usamos ternarios (números de base 3) para tres dados.

Valor del bit correspondiente a cada dado	Dado que se lanza
d <sub>1</sub> d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>	
0 0 0	d <sub>1</sub> d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
0 0 1	d <sub>3</sub>
0 0 2	d <sub>3</sub>
0 1 0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
0 1 1	d <sub>3</sub>
0 1 2	d <sub>3</sub>
0 2 0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
0 2 1	d <sub>3</sub>
0 2 2	d <sub>3</sub>
1 0 0	d <sub>1</sub> d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
1 0 1	d <sub>3</sub>
1 0 2	d <sub>3</sub>
1 1 0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
1 1 1	d <sub>3</sub>
1 1 2	d <sub>3</sub>
1 2 0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
1 2 1	d <sub>3</sub>
1 2 2	d <sub>3</sub>
2 0 0	d <sub>1</sub> d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
2 0 1	d <sub>3</sub>
2 0 2	d <sub>3</sub>
2 1 0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
2 1 1	d <sub>3</sub>
2 1 2	d <sub>3</sub>
2 2 0	d <sub>2</sub> d <sub>3</sub>
2 2 1	d <sub>3</sub>
2 2 2	d <sub>3</sub>

Tabla 2.3 Secuencia de lanzamiento de tres dados de acuerdo a los cambios en los números ternarios (base 3)

Cuyo patrón característico es el de un árbol con tres ramas como se puede ver en la Fig. 2.3 y cuya ecuación es  $S \rightarrow eSSS$

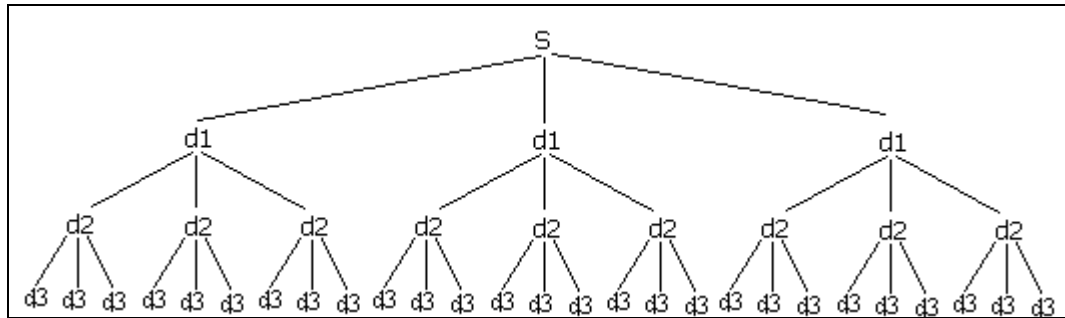


Fig. 2.3 árbol que representa la secuencia de lanzamiento de tres dados cuando se manejan números ternarios (de base 3)

*Si queremos árboles con  $m$  ramas en lugar de números binarios o ternarios se usan números  $m$ -arios (de base  $m$ ) que generan árboles de  $m$  ramas y que se representan por la ecuación  $S \rightarrow eSS...S$*

*Entonces el número de ramas corresponde a la base numérica (binaria, ternaria,...) que se manejan y el número de niveles a la cantidad de dígitos (1,2,3, ...) que forman un número, ya que como se vio cada dígito corresponde a un dado y este se lanza en un nivel, si queremos hacer un generador de ruido con  $n$  niveles y  $m$  ramas el pseudocódigo queda*

```

S(num_nivel)
{
  if num_nivel < N
    e(num_nivel)
    S(num_nivel+1)
    S(num_nivel+1)
    .....
    .....
    S(num_nivel+1)
  else
    suma valores de dados y genera ruido
}

```

Podemos asumir árboles que generen ramas y niveles en forma aleatoria, con lo que podemos tener una gran diversidad de estructuras profundas para la generación de ruidos, pero todas basadas en la ecuación lingüística  $S \rightarrow eSSS...S$ , la cual a su vez es un caso particular de la ecuación de la naturaleza  $S \rightarrow e^*S^*$ , donde la flecha  $\rightarrow$  indica que  $S$  se puede sustituir por  $e^*S^*$ .

En la ecuación  $S \rightarrow e^*S^*$ ,  $S$  significa Sistema,  $e$  es cualquier elemento del sistema,  $e^*$  significa que se pueden tener tantos elementos como se quieran (en particular se puede tener 1 elemento) y  $S^*$  indica que el sistema se puede llamar tantas veces como se quiera. Observe que se utiliza el signo  $*$  como un factor de repetición, lo cual no es una notación

común dentro de las reglas de producción, pero en este caso facilita la representación. Como ejemplos de casos particulares de  $S \rightarrow e^* S^*$  tenemos los mostrados en la tabla 2.4.

Ecuación	Base numérica	Numero de ramas del árbol
$S \rightarrow e$		
$S \rightarrow e S$		
$S \rightarrow e SS$	2 Binarios (0,1)	2
$S \rightarrow e SSS$	3 Ternarios (0,1,2)	3
$S \rightarrow e SSSS$	4 Cuaternarios (0,1,2,3)	4
...	...	....
$S \rightarrow e SS\dots S$	m m-arios (0,1,2,3, ...,m-1)	m

Tabla 2.4 Ejemplos de casos particulares de la ecuación  $S \rightarrow e^* S^*$ , donde  $e^*$  indica que  $e$  se puede repetir tantas veces como se quiera y  $S^*$  indica lo mismo para  $S$

O sea que las ecuaciones que generan ruido basado en números binarios, ternarios y m-arios son casos particulares de la ecuación  $S \rightarrow e^* S^*$ , con lo que planteamos que la estructura profunda de todos esos ruidos sigue la estructura de la Ecuación de la naturaleza  $S \rightarrow e^* S^*$ .

### 2.3 Estructura del Ruido Blanco y del Ruido Constante

Si se observa la tabla 2.4 también se tienen los caso de  $S \rightarrow e$  y  $S \rightarrow eS$

$S \rightarrow eS$  corresponde al caso de un generador basado en números de base 1, o sea que en este caso se tiene que el sistema numérico solo toma un valor (por facilidad asumimos que toma el valor 0), pero los números pueden estar formados por tantos dígitos como se quiera, por ejemplo algunos números de base 1 son 0, 00, 000,....., 000...0, si recordamos que la base numérica corresponde al numero de ramas del árbol entonces se tienen árboles que en cada etapa generan una rama y que tienen tantos niveles como dígitos tiene el numero.

Por ejemplo si el numero tiene un solo digito el sistema solo genera una rama por lo que se lanza una sola vez el dado y el resultado es el ruido que se genera; Si tiene 2 dígitos genera árboles con dos niveles, en este caso se tienen dos dados, uno por cada nivel, por lo que la estructura que se genera es un árbol de dos niveles, pero con una sola rama, entonces cuando se pasa por cada nivel se lanza el dado correspondiente pero al final se suma una sola vez y el resultado es el ruido que se produce; si se maneja 3 dígitos se tienen árboles con tres niveles pero una sola rama por nivel.

En general si se tienen un sistema que maneja números con n dígitos de base 1 como 000...0 entonces lo que se generan son árboles con n niveles, pero con una sola rama por nivel. En cada nivel lanza un dado y se llama nuevamente, por lo que al final el algoritmo recorre los n niveles del árbol echando todos los dados, los suma generando un ruido aleatorio y genera el ruido resultante.

Ahora si se vuelve a llamar al sistema se genera un nuevo numero, pero este es independiente del anterior, por lo que, lo que se tiene es un generador de números aleatorios. De donde *la ecuación  $S \rightarrow eS$  representa la estructura del ruido aleatorio o blanco.*

$S \rightarrow e$  es el caso trivial y significa que solo se lanza 1 dado que genera un valor que permanece constante, por lo que si originalmente en el sistema se genero un ruido  $k$  este valor se conserva permanentemente o sea que  $S \rightarrow e$  representa la generación de ruido constante .

## FUENTES DE INFORMACION

1. Martin Gardner, Música blanca y música parda, curvas fractales y fluctuaciones del tipo  $1/f$ , en Investigación y Ciencia, Junio 1978 (White and brown music, fractal curves, and one-over-f noise, en Scientific American, abril de 1978).
2. Edoardo Milotti, El ruido  $1/f$  en Investigación y Ciencia, diciembre de 1996.
3. Luis Candelas; Fundamentos matemáticos del análisis espectral, en <http://webs.ono.com/usr047/luis candelas/tema03.html>, (consultado el 20 de Mayo del 2004)
4. Jesús Bernal Bermúdez, Jesús Bobadilla Sancho, Pedro Gómez Vilda, Reconocimiento de Voz y Fonética Acústica, Ed. Alfaomega ra-ma, Octubre 2000, México.
5. Horacio Alberto García Salas, Aplicación de los sistemas evolutivos a la composición musical, Tesis de Licenciatura, UPIICSA del Instituto Politécnico Nacional, México.
6. Armando Castañeda Rojano, Uriel Hernández Santana, Mario Herrera González, Prototipo de Armonización de una Melodía por Computadora, Trabajo Terminal 0317, Escuela Superior de Computo del Instituto Politécnico Nacional, 2002 México.
7. Ruido  $1/f$  <http://www.nslj-genetics.org/wli/1fnoise/>
8. Pedro Miramontes, El Color del Ruido, Facultad de Ciencias, UNAM, México., en [www.ejournal.unam.mx/ciencias/no54/CNS05401.pdf](http://www.ejournal.unam.mx/ciencias/no54/CNS05401.pdf) (consultado el 4/vi/2004)
9. Juan Manuel Valderas Jaramillo, José María Alba Riesco, Elena Olmedo Fernández, Modelización estocástica en los mercados financieros: un puente entre lo simple y lo complejo, en Revista Encuentros Multidisciplinarios Núm. 12-2002, septiembre-diciembre 2002.
10. Fernando Galindo Soria, Una Ecuación de la Naturaleza, en Memorias del X Congreso Nacional ANIEI sobre Informática y Computación, Xalapa, Ver., Octubre de 1998.
11. Música Electrónica: órganos, Biblioteca Básica Electrónica, Núm. 25, Ed. Nueva Lente, 1986, Madrid.